

約数

12 という数をかけ算の形で表してみますと、

$$\begin{aligned}1 \times 12 &= 12 & 2 \times 6 &= 12 & 3 \times 4 &= 12 \\2 \times 2 \times 3 &= 12 & 1 \times 2 \times 6 &= 12 & \dots & \end{aligned}$$

などと書き表すことができます。たとえば 2×6 の 2 と 6 の意味は

$$12 \div 2 = 6 \quad 12 \div 6 = 2$$

つまり、12 は 2 でも割り切れるし、6 でも割り切れる、ということを表しています。

同じように 3×4 は

$$12 \div 3 = 4 \quad 12 \div 4 = 3 \quad \text{で}$$

12 は 3 でも 4 でも割り切れるということを表しています。

これら「1、2、3、4、6、12」を、「12 の約数」と言います。「12 の約数」とは、12 を割り切ることのできる整数を意味しています。

$$12 \text{ の約数} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

例題 1、24 の約数を全て書き出さない。

答を求める時に、「1 で割れる(当たり前!)」「2 で割れるかな? → 割り切れる!」「3 で割れるかな? → 割り切れる!」「4 で割れるかな? → 割り切れる!」「5 で割れるかな? → 割り切れない!!!」と順に考えていくのが自然な方法なのですが、数が大きいと時間もかかるし、途中で抜けてしまうこともあります。ですから、次のような方法で考えてみましょう。

小さいものから、割り切れる数を順に考えていきます。まずは「1」があります。(1 は全ての数の約数です) 約数として「1」を考えた時、実際に 24 を 1 で割ってみます。

$24 \div 1 = 24$ ですね。この時、わり算の答である「24」も約数になります。こうして、1 つ約数を見つけたら、その数でわり算した答も約数になるので、同時にもう 1 つの約数を見つけることができます。

約数

次に割り切れる小さな数字は「2」です。この時、24を2で割った答12も、24を割り切ることができますから、24の約数です。こうして1を見つけたらそれに対応する24、2を見つけたらそれに対応する12を、と書き出していきます。

$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \end{array} \right.$
 $\left. \right\}$
 1は必ず約数です。1を書いたら次に、24を1で割ります。

$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 24 \end{array} \right.$
 $\left. \right\}$
 $24 \div 1 = 24$ の「24」を下に書きます。

$\left\{ \begin{array}{ll} 1 & 2 \\ 24 & \end{array} \right.$
 $\left. \right\}$
 次に割り切れる数の小さなものは、2です。そして24を2で割ります。

$\left\{ \begin{array}{ll} 1 & 2 \\ 24 & 12 \end{array} \right.$
 $\left. \right\}$
 $24 \div 2 = 12$ 2の下に12を書きます。

$\left\{ \begin{array}{lll} 1 & 2 & 3 \\ 24 & 12 & \end{array} \right.$
 $\left. \right\}$
 次に割り切れる数の小さな整数は3。3を書いたら、24を3で割ります。

$\left\{ \begin{array}{lll} 1 & 2 & 3 \\ 24 & 12 & 8 \end{array} \right.$
 $\left. \right\}$
 $24 \div 3 = 8$ 3の下に8を書きます。

$\left\{ \begin{array}{llll} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 24 & 12 & 8 & \end{array} \right.$
 $\left. \right\}$
 次に割り切れる数の小さな整数は4。4を書いたら、24を4で割ります。

$\left\{ \begin{array}{llll} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 24 & 12 & 8 & 6 \end{array} \right.$
 $\left. \right\}$
 $24 \div 4 = 6$ 4の下に6を書きます。

$\left\{ \begin{array}{llll} 1 & 2 & 3 & 4 & \times 5 \\ 24 & 12 & 8 & 6 & \end{array} \right.$
 $\left. \right\}$
 4の次は5ですが、5は24を割り切れません。5の次は6ですが、6はすでに書いてありますから、もう書く必要はありません。

約数

例題 1 の解答

$$\left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ & & 8 & \mathbf{6} \end{array} \right\}$$

類題 1、次の整数の、それぞれ約数を全て書き出さない。

①、6

答、 $\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\}$

②、36

答、 $\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\}$

③、125

答、 $\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\}$

④、120

答、 $\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\}$

⑤、180

答、 $\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\}$

公約数

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 30 \quad 105} \\ 5 \overline{) 10 \quad 35} \\ \hline 2 \quad 7 \end{array}$$

こうでしたね。

最大公約数は、左にでた数「3 5」だけをかけ算します。(最小公倍数を求めるときは、「3 5 2 7」をかけ算しました。そのちがいに注意しておきましょう。)

$$3 \times 5 = 15 \cdots \text{最大公約数}$$

公約数は、最大公約数の約数ですから、15の約数を求めると30と105の公約数全てが求まります。

$$15 \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad 3 \\ 15 \quad 5 \end{array} \right\}$$

したがって、30と105の公約数は {1 3 5 15} となります。

類題6、それぞれ連除法によって最大公約数を求め、公約数を書き出さない。

①、84と90

答、_____

公約数の利用

例題6、下の図のように、たて24cm、よこ40cmの長方形の中に、はしからはしまですきまなく正方形の紙をならべます。この時、ならべる正方形の紙をできるだけ大きいものにした時、正方形の1辺は何cmになりますか。また、正方形は何枚必要ですか。

例えば、たて1cm、よこ1cmの正方形(★=1cm)の場合、ぴったりとすきまなくならびますね。たて2cm、よこ2cmの正方形(★=2cm)でも、すきまなく

ならべることができます。このようにすきまなく、ぴったりとならべることのできる正方形を考えます。

たての部分で考えると、★は24cmの中にぴったりとならぶのですから、★は24cmを割り切ることのできる数、つまり★は24の約数になることがわかります。

同様によこの部分では、★は40cmの中にぴったりとならぶのですから、★は40cmを割り切ることのできる数、つまり★は40の約数となります。

★は正方形の一辺で、たてもよこも同じ長さですから、★は24の約数でもあり40の約数でもあります。つまり★は24と40の公約数ということが言えます。

さらに問題で「ならべる正方形の紙をできるだけ大きいものにした時」とありますから、★は24と40の公約数の中で、最も大きいもの、つまり★は24と40の最大公約数ということになります。

$$\begin{array}{r}
 2 \) \ 24 \ 40 \\
 \underline{2} \) \ 12 \ 20 \\
 \underline{2} \) \ 6 \ 10 \\
 \quad \quad \quad 3 \ 5 \\
 \quad \quad \quad \uparrow \ \uparrow
 \end{array}$$

実はこの3は たての枚数！
 実はこの5は よこの枚数！

$$2 \times 2 \times 2 = 8 \dots \text{最大公約数} = \star$$

$$\begin{aligned}
 24 \text{ cm} \div 8 \text{ cm} &= 3 \text{ 枚} \dots \text{たての枚数} \\
 40 \text{ cm} \div 8 \text{ cm} &= 5 \text{ 枚} \dots \text{よこの枚数} \\
 3 \text{ 枚} \times 5 \text{ 枚} &= 15 \text{ 枚}
 \end{aligned}$$

答、8 cm、15枚

